ΜΟΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: ΟΙ ΔΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΤΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ NEO-RIEMANNIAN ΟΜΑΔΑΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΣΥΜΦΩΝΩΝ ΤΡΙΑΔΩΝ

Μάνδρατζη Δέσποινα

Τομέας Μαθηματικών, ΕΜΠ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δρ. Λαμπροπούλου Σοφία

26 Δεκεμβρίου 2013

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- ⋆ Μουσική - συμμετρία → Θεωρία Ομάδων
- ⋆ Σύνδεση μεταξύ ατονικής και neo-Riemannian ομάδας
- ⋆ Σύνδεση ατονικής και neo-Riemannian θεωρίας
- ⋆ Περιγραφή ατονικής και υστεροτονικής μουσικής
- ⋆ Σημείο αφετηρίας: μετάφραση των νοτών σε μαθηματικά αντικείμενα

Η ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΕΩΝ ΦΘΟΓΓΩΝ ΜΕ ΤΟ $\mathbb{Z}_{12}$

Κλάσεις φθόγγων και συχνότητα

Συχνότητα: Αριθμός ταλαντώσεων στη μονάδα χρόνου

$\downarrow$

Συνεχές σύνολο ακουστικών συχνοτήτων (Ακουστικό φάσμα$= (20, 20000)Hz$)

$\downarrow$

Φθόγγος: συχνότητα στο ακουστικό φάσμα, όχι αμιγώς φυσικό μέγεθος.

$\downarrow$

Φθόγγος

Ψυχοακουστικά, ως μέγεθος εκφράζει την αισθητηριακή εμπειρία της ακουστικής συχνότητας και έτσι επιτρέπει την οργάνωση των ήχων-συχνοτήτων σε ένα διακριτό σύνολο.

Στο σύνολο των φθόγγων-συχνοτήτων για δύο φθόγγους a, b, ισχύει η σχέση ισοδυναμίας «$\sim$» :

$$a \sim b \quad \text{αν} \quad a/b = 2^j \ , \ \text{όπου } j \in \mathbb{Z}\,. \tag{1}$$

Κατηγοριοποίηση φθόγγων-συχνοτήτων με λόγο 2^j , $j \in \mathbb{Z} \rightarrow$ σε μια ισοδύναμη *κλάση φθόγγων*. Ισοδύναμοι φθόγγοι ακούγονται παρόμοιοι.
Παράδειγμα: 2 φθόγγοι με συχνότητες: $a_1 = 261,63Hz$, $b_1 = 523,25Hz$
$\rightarrow \quad b_1/a_1 = 1.9999 = 2.$

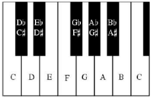
Κλάσεις φθόγγων και συχνότητα

- Δύο ισοδύναμοι φθόγγοι απέχουν j οκτάβες.
- *Οκτάβα*
  - Ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ισοδύναμων φθόγγων, δηλαδή δύο φθόγγων με λόγο 2.
  - Αποτελεί το μέγιστο υποσύνολο του συνόλου των φθόγγων που περιέχει μη ισοδύναμους διαδοχικούς φθόγγους.
- Αν διαιρέσουμε την οκτάβα σε 12 ίσα μέρη που αντιστοιχούν σε λόγο s το καθένα, έχουμε : $s^{12} = 2/1 \to s = 2^{1/12} = 1.0594$.
- Ο λόγος s (*semitone*) είναι: ο λόγος των συχνοτήτων δύο γειτονικών φθόγγων - αντιστοιχεί μουσικά στο θεμελιώδες διάστημα του *ημιτονίου*.
- Παίρνουμε τους 12 ισοκατανεμημένους φθόγγους μέσα σε μία οκτάβα (equal tempered tuning)
- Οι 12 αυτοί φθόγγοι συνδέονται με τις *12 νότες*

Ντο	Ντο $\sharp$	Ρε	Ρε $\sharp$	Μι	Φα	Φα $\sharp$	Σολ	Σολ $\sharp$	Λα	Λα $\sharp$	Σι
	Ρε $\flat$		Μι $\flat$			Σολ $\flat$		Λα $\flat$		Σι $\flat$	
C	$C\sharp$	D	$D\sharp$	E	F	$F\sharp$	G	$G\sharp$	A	$A\sharp$	B
	$D\flat$		$E\flat$			$G\flat$		*A flat*		$B\flat$	

Οι νότες

Φθόγγοι που αντιστοιχούν στα μαύρα πλήκτρα έχουν δύο ονομασίες και λέγονται *εναρμόνιοι*.



Οι νότες σε μία οκτάβα

Με βάση τη σχέση ισοδυναμίας → ισοδύναμοι φθόγγοι αντιστοιχίζονται στην ίδια νότα. →
Όλο το εύρος των φθόγγων που μπορούμε να ακούσουμε: αλληλουχία οκτάβων, δηλαδή δώδεκα νοτών.

Τα πλήκτρα του πιάνου ανά οκτάβες

Ισοδύναμες Κλάσεις Φθόγγων - Νότες

Τελικά, οι 12 ισοδύναμες κλάσεις φθόγγων ταυτοποιούνται με τις 12 νότες.

Παράδειγμα: φθόγγοι με συχνότητες a_1, b_1 με λόγο $b_1/a_1 = 2$ αντιπροσωπεύουν το μεσαίο Ντο και το Ντο μία οκτάβα ψηλότερα.

Κλάσεις Φθόγγων και ακέραιοι MODULO 12

Φθόγγοι → σύνολο $\mathbb{Z}$
Τότε, οι φθόγγοι των πλήκτρων του πιάνου → υποσύνολο του $\mathbb{Z}$.

Σχέση ισοδυναμίας φθόγγων-συχνοτήτων → σχέση ισοδυναμίας φθόγγων-ακεραίων.

Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ισχύει η σχέση ισοδυναμίας (ισοτιμία modulo 12) «≡», με $a, b \in Z$:

$$a \equiv b \quad \text{αν} \quad b - a = 12n \ , \ n \in \mathbb{Z} \, . \tag{2}$$

Διαμέριση σε 12 κλάσεις ισοδυναμίας : 0, 1, ..., 11.

↓

Το σύνολο των 12 κλάσεων υπολοίπων modulo 12 συμβολίζεται με $\mathbb{Z}_{12}$.

Κλάσεις φθόγγων-συχνοτήτων → κλάσεις φθόγγων-ακεραίων

Ισοδύναμοι φθόγγοι απέχουν n οκτάβες.

C	$C\sharp$	D	$D\sharp$	E	F	$F\sharp$	G	$G\sharp$	A	$A\sharp$	B
	$D\flat$		$E\flat$			$G\flat$		$A\flat$		$B\flat$	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

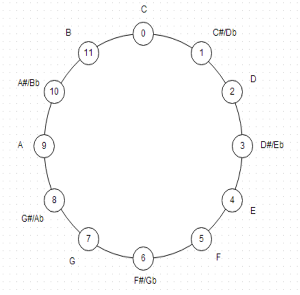
Αντιστοίχιση των 12 κλάσεων των φθόγγων-ακεραίων με το $\mathbb{Z}_{12}$.

Μουσικοί όροι των διαστημάτων που μπορούν να εμφανιστούν ανάμεσα στις κλάσεις φθόγγων μίας οκτάβας:

- Πρώτη καθαρή : 0 ημιτόνια
- Δεύτερη μικρή : 1 ημιτόνιο
- Δεύτερη μεγάλη : 2 ημιτόνια
- Τρίτη μικρή : 3 ημιτόνια
- Τρίτη μεγάλη : 4 ημιτόνια
- Τέταρτη καθαρή : 5 ημιτόνια
- Τέταρτη αυξημένη : 6 ημιτόνια
- Πέμπτη καθαρή : 7 ημιτόνια
- Έκτη μικρή : 8 ημιτόνια
- Έκτη μεγάλη : 9 ημιτόνια
- Έβδομη μικρή : 10 ημιτόνια
- Έβδομη μεγάλη : 11 ημιτόνια

- $0 \to 5$ διάστημα μεταξύ των δύο κλάσεων φθόγγων: $5 - 0 = 5$ ημιτόνια.
- $10 \to 6$;

Το σύνολο $\mathbb{Z}_{12}$ κληρονομεί την πρόσθεση των ακεραίων $\to$ $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ ομάδα $\to$
οι πράξεις υπολογίζονται απλά γεωμετρικά με βάση το μουσικό ρολόι!



Η κυκλική αντιστοίχιση των κλάσεων φθόγγων με το $\mathbb{Z}_{12}$.

Άρα: το διάστημα $10 \to 6$: 8 ημιτόνια.

Αυτή η μετάφραση από τις κλάσεις φθόγγων στο $\mathbb{Z}_{12}$ μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αφηρημένη άλγεβρα για να μοντελοποιήσουμε τα μουσικά γεγονότα, όπως θα δούμε παρακάτω.

Η ΑΤΟΝΙΚΗ ΟΜΑΔΑ T/I

Οι συναρτήσεις T_n, I_n

Δύο βασικές μουσικές λειτουργίες για την επεξεργασία μίας μελωδίας:

- *Μετατόπιση* (ή τρανσπόρτο) T: αυτούσια επαναδιατύπωση της μελωδίας σε άλλους τόνους - διατηρεί τα διαστήματα.
- *Αναστροφή* I: αναδιατύπωση της μελωδίας - διατηρεί τα διαστήματα «σε απόλυτη τιμή».

Μουσικές λειτουργίες → Μαθηματικές συναρτήσεις:

(Μετατόπιση)

Έστω $n \in \mathbb{Z}_{12}$. T_n: $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$:

$$T_n(x) := x + n \pmod{12} \tag{3}$$

Μετατόπιση κατά n (transposition).

(Αναστροφή)

Έστω $n \in \mathbb{Z}_{12}$. $I_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$:

$$I_n(x) := -x + n \pmod{12} \tag{4}$$

Αναστροφή κατά n (inversion).

Κατ΄ επέκταση, οι T_n, I_n μπορούν να δράσουν πάνω σε :

- μεμονωμένες κλάσεις φθόγγων:

$$T_3(5) = 8 \pmod{12}\ ,\ T_6(7) = 13 - 12 = 1 \pmod{12}\ ,$$
$$I_3(2) = 1 \pmod{12}\ ,\ I_4(9) = -5 + 12 = 7 \pmod{12}\ ,$$

- σύνολα κλάσεων φθόγγων:

$$T_7\{0,4,7\} = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{7, 11, 2\}\ ,$$
$$I_5\{0,8,5\} = \{I_5(0), T_5(8), T_5(0)\} = \{5, 9, 0\}\ ,$$

- ακολουθίες κλάσεων φθόγγων:

$$T_2\langle 7,0,0,10\rangle = \langle T_2(7), T_2(0), T_2(0), T_2(10)\rangle = \langle 9,2,2,0\rangle\ ,$$
$$I_0\langle 0,4,4,7,11\rangle = \langle I_0(0), I_0(4), I_0(4), I_0(7), I_0(11)\rangle = \langle 0,8,8,5,1\rangle\ .$$

Μουσικό παράδειγμα 1

Schoenberg, String Quartet No.4 .

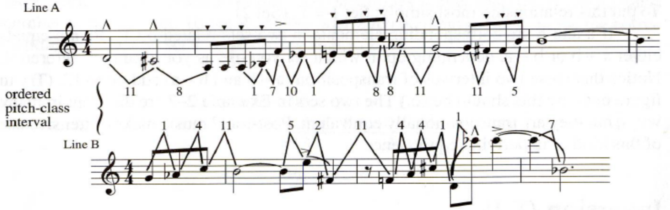
Η μελωδία (έστω M) της πρώτης σειράς είναι:

$$\begin{aligned} M &= \langle D, C\sharp, A, B\flat, F, E\flat, E, C, A\flat, G, F\sharp, B \rangle \\ &= \langle 2, 1, 9, 10, 5, 3, 4, 0, 8, 7, 6, 11 \rangle. \end{aligned}$$

Η μελωδία της δεύτερης σειράς προκύπτει ως $T_6(M)$:

$$\begin{aligned} T_6(M) &= \langle 8, 7, 3, 4, 11, 9, 10, 6, 2, 1, 0, 5 \rangle \\ &= \langle A\flat, G, E\flat, E, B, A, A\sharp, F\sharp, D, C\sharp, C, F \rangle. \end{aligned}$$

Μουσικό παράδειγμα 2



Schoenberg, String Quartet No.4 .

Η μελωδία της πρώτης σειράς είναι και πάλι η M:

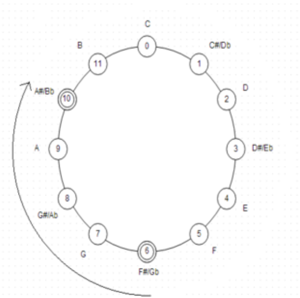
$$\begin{aligned} M &= \langle D, C\sharp, A, B\flat, F, E\flat, E, C, A\flat, G, F\sharp, B\rangle \\ &= \langle 2, 1, 9, 10, 5, 3, 4, 0, 8, 7, 6, 11\rangle. \end{aligned}$$

Η μελωδία της δεύτερης σειράς προκύπτει ως: $I_9(M)$:

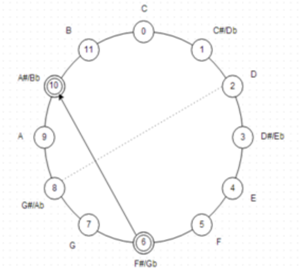
$$\begin{aligned} I_9(M) &= \langle 7, 8, 0, 11, 4, 6, 5, 9, 1, 2, 3, 10\rangle \\ &= \langle G, A\flat, C, E, F\sharp, F, A, C\sharp, D, E\flat, B\flat\rangle. \end{aligned}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

- $T_n(x)$: Περιστροφή του x κατά n βήματα στο μουσικό ρολόι.
- $I_n(x)$: Ανάκλαση του x ως προς τον άξονα που διέρχεται από τις κορυφές $0 + n/2$, $6 + n/2$.



$T_4(6) = 10$



$I_4(6) = 10$

Η ομάδα T/I

Ορίζουμε το σύνολο T/I:

$$\begin{aligned} T/I &:= T \cup I = \{T_n \mid n = 0,1,...,11\} \cup \{I_n \mid n = 0,1,...,11\} \\ &= \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, \\ &\quad I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}\} \qquad (5) \end{aligned}$$

και ορίζουμε πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.

Θεώρημα

Το σύνολο T/I με διμελή πράξη την σύνθεση συναρτήσεων είναι ομάδα.

Απόδειξη

1. *Κλειστότητα*: Η σύνθεση δύο στοιχείων της T/I δίνει στοιχείο της T/I:

$$T_m \circ T_n = T_{m+n\,(\text{mod } 12)} \in T/I\,. \qquad (6)$$
$$T_m \circ I_n = I_{m+n\,(\text{mod } 12)} \in T/I\,. \qquad (7)$$
$$I_m \circ T_n = I_{m-n\,(\text{mod } 12)} \in T/I\,. \qquad (8)$$
$$I_m \circ I_n = T_{m-n\,(\text{mod } 12)} \in T/I\,. \qquad (9)$$

2. *Προσεταιριστική*: Ενδεικτικά για μία τριάδα $I_n, I_m, T_k \in T/I$ για $n, m, k \in \{0, 1, ..., 11\}$ έχουμε:

$$I_n \circ (I_m \circ T_k) = (I_n \circ I_m) \circ T_k\,.$$

3. *Ταυτοτικό στοιχείο* : $e = T_0 \in T/I$.
4. *Αντίστροφο στοιχείο* : $(T_n)^{-1} = T_{-n} = T_{(12-n)} \in T/I$,
$(I_n)^{-1} = I_n$. $\square$

Η ομάδα T/I χρησιμοποιείται κυρίως στην ανάλυση ατονικής μουσικής (20ος αιώνας: 2η Σχολή Βιέννης)

$$\downarrow$$

Ομάδα T/I: Ατονική ομάδα (atonal group)

$$\downarrow$$

Η εφαρμογή της γενικεύεται και σε κλασικά τονικά έργα (όπως μίας φούγκας του Bach).

Η δομή της ομάδας T/I

Υπολογίζουμε τους μεταθέτες της ομάδας T/I:

$$\begin{aligned}[T_n, I_m] &= T_n \circ I_m \circ T_{12-n} \circ I_m \\ &= T_{2n \pmod{12}}\,.\end{aligned}$$

Άρα, τα T_n, I_n μετατίθενται μόνο για $n = 0,\ 6$.

$$\begin{aligned}[T_n, T_m] &= T_n \circ T_m \circ T_{12-n} \circ T_m \\ &= T_0 = e\,.\end{aligned}$$

Άρα, τα T_n μετατίθενται μεταξύ τους.

$$\begin{aligned}[I_n, I_m] &= I_n \circ I_m \circ I_n \circ I_m \\ &= T_{2(n-m) \pmod{12}}\,.\end{aligned}$$

Άρα, τα I_n μετατίθενται μεταξύ τους μόνο για $n = m,\ m+6$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

- Η ομάδα T/I είναι μη αβελιανή (και μη κυκλική).
- Το σύνολο T μαζί με τη διμελή πράξη είναι κυκλική υποομάδα με γεννήτορα το T_1, δηλαδή $\langle T_1 \rangle = T$, άρα και αβελιανή.
- Το σύνολο I μαζί με τη διμελή πράξη δεν σχηματίζουν υποομάδα - λείπει το ταυτοτικό στοιχείο.
- Ισχύει: $T_n I_0 = I_n \quad \rightarrow \quad$ Γεννήτορες: T_1, I_0.

Η δομή της T/I παραπέμπει στην D_{12}.

Ποια είναι η ομάδα D_{12}?

Διεδρική ομάδα τάξης 24: η ομάδα των συμμετριών ενός κανονικού 12-γώνου. Έστω κανονικό 12-γωνο με κορυφές 0,1,...,11 πάνω στον μοναδιαίο κύκλο ξεκινώντας από το (1,0) με αντιωρολογιακή φορά. Η D_{12} περέχει 2 ειδών συμμετρίες :

- στροφές C_k , $k = 0, \ 1, ..., 11$ στο επίπεδο, κατά γωνίες $k\pi/6$.
- ανακλάσεις (στροφές στον χώρο) Σ_k , $k = 0, \ 1, ..., n-1$, ως προς τους άξονες που σχηματίζουν γωνίες $k\pi/12$ με τον άξονα xx'.

Πρόταση

Η ομάδα T/I είναι ισόμορφη με την D_{12} : $T/I \simeq D_{12}$.

Γεωμετρική απόδειξη

Είναι φανερό ότι οι 12 μετατοπίσεις T_n και οι 12 αναστροφές I_n αντιστοιχούν στις συμμετρίες του κανονικού 12-γωνου, δηλαδή στις 12 στροφές C_k και στις 12 ανακλάσεις.

Αλγεβρική απόδειξη

Η D_{12} έχει 2 γεννήτορες C_1, Σ_0, και ισχύει:

$$(C_1)^{12} = 1\ , \quad (\Sigma_0)^2 = 1\ , \quad \Sigma_0 C_1 (\Sigma_0)^{-1} = C_1^{-1}\,. \tag{10}$$

Ορίζουμε: $\phi : D_{12} \to T/I$ δίνοντας τις εικόνες των γεννητόρων :

$$\phi\ :\ C_1 \to T_1\ ,\ \Sigma_0 \to I_0 \tag{11}$$

Ο ομομορφισμός θα πρέπει να σέβεται τις σχέσεις (10):

$$\phi({C_1}^{12}) = \phi(C_1)^{12} = \phi(T_1)^{12} = T_{12} = T_0 = e\,,$$

$$\phi({\Sigma_0}^2) = \phi(\Sigma_0)^2 = (I_0)^2 = I_0 \circ I_0 = I_0 \circ (I_0)^{-1} = e\,,$$

$$\phi(\Sigma_0 C_1 {\Sigma_0}^{-1}) = \phi(\Sigma_0)\phi(C_1)\phi({\Sigma_0}^{-1}) = I_0 \circ \underbrace{T_1 \circ I_0}_{I_1} = I_0 \circ I_1 = -I_1$$

$$\text{και}\quad -I_1(x) = x - 1 = T_{-1}(x) = (T_1(x))^{-1} = {C_1}^{-1}\,.$$

- Όλα τα στοιχεία της T/I είναι εικόνες μέσω του ϕ,
- $|T/I| = |D_{12}|$

$\Big\}$ ϕ : ισομορφισμός $\to$ $T/I \cong D_{12}$

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0
T_2	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1
T_3	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2
T_4	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3
T_5	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4
T_6	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
T_7	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
T_8	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
T_9	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
T_{10}	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9
T_{11}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}
I_0	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1
I_1	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2
I_2	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3
I_3	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4
I_4	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5
I_5	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6
I_6	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7
I_7	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8
I_8	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9
I_9	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}
I_{10}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}
I_{11}	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0

Ο πίνακας της ομάδας T/I.

	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}
E	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0
C_2	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1
C_3	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2
C_4	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3
C_5	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4
C_6	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5
C_7	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6
C_8	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7
C_9	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8
C_{10}	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9
C_{11}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}
Σ_0	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
Σ_1	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2
Σ_2	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3
Σ_3	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4
Σ_4	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5
Σ_5	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6
Σ_6	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7
Σ_7	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8
Σ_8	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9
Σ_9	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}
Σ_{10}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}
Σ_{11}	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E

Ο πίνακας της διεδρικής ομάδας D_{12}.

Το σύνολο (S) των συμφώνων τριάδων

- *Τριαδική συγχορδία ή τριάδα*: συνήχηση που περιέχει 3 νότες.
- *Σύμφωνη* ονομάζουμε μία τριάδα όταν τα διαστήματα μεταξύ των νοτών μέσα στη συγχορδία είναι *σύμφωνα διαστήματα*.

Μια σύμφωνη συγχορδία μπορεί να είναι:

- *Μείζονα* (major). Σε ευθεία κατάσταση έχει τη μορφή:

$$(x,\, x+4\,(\mathrm{mod}\,12),\, x+7\,(\mathrm{mod}\,12)), \quad \text{όπου} \quad x \in \mathbb{Z}_{12}\,. \tag{12}$$

  Για παράδειγμα, $C =$ Ντο μείζονα $= (0,4,7) = (C,E,G)$.
- *Ελάσσονα* (minor). Σε ευθεία κατάσταση έχει τη μορφή:

$$(x,\, x+3\,(\mathrm{mod}\,12),\, x+7\,(\mathrm{mod}\,12)), \quad \text{όπου} \quad x \in \mathbb{Z}_{12}\,. \tag{13}$$

  Για παράδειγμα, $a =$ λα ελάσσονα $= (9,0,4) = (A,C,E)$.

Ορίζουμε S *το σύνολο των συμφώνων συγχορδιών*:

$$\begin{aligned} S &= S^{+} \cup S^{-} \\ &= \{\langle x,\, x+4\,(\mathrm{mod}\,12),\, x+7\,(\mathrm{mod}\,12)\rangle \mid x \in \mathbb{Z}_{12}\} \cup \\ &\quad \{\langle x+7\,(\mathrm{mod}\,12),\, x+3\,(\mathrm{mod}\,12),\, x\rangle \mid x \in \mathbb{Z}_{12}\}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Τα 24 στοιχεία του συνόλου S:

Major Triads	Minor Triads
$C = \langle 0, 4, 7 \rangle$	$\langle 0, 8, 5 \rangle = f$
$C\sharp = D\flat = \langle 1, 5, 8 \rangle$	$\langle 1, 9, 6 \rangle = f\sharp = g\flat$
$D = \langle 2, 6, 9 \rangle$	$\langle 2, 10, 7 \rangle = g$
$D\sharp = E\flat = \langle 3, 7, 10 \rangle$	$\langle 3, 11, 8 \rangle = g\sharp = a\flat$
$E = \langle 4, 8, 11 \rangle$	$\langle 4, 0, 9 \rangle = a$
$F = \langle 5, 9, 0 \rangle$	$\langle 5, 1, 10 \rangle = a\sharp = b\flat$
$F\sharp = G\flat = \langle 6, 10, 1 \rangle$	$\langle 6, 2, 11 \rangle = b$
$G = \langle 7, 11, 2 \rangle$	$\langle 7, 3, 0 \rangle = c$
$G\sharp = A\flat = \langle 8, 0, 3 \rangle$	$\langle 8, 4, 1 \rangle = c\sharp = d\flat$
$A = \langle 9, 1, 4 \rangle$	$\langle 9, 5, 2 \rangle = d$
$A\sharp = B\flat = \langle 10, 2, 5 \rangle$	$\langle 10, 6, 3 \rangle = d\sharp = e\flat$
$B = \langle 11, 3, 6 \rangle$	$\langle 11, 7, 4 \rangle = e$

Ο πίνακας του συνόλου S των συμφώνων συγχορδιών.

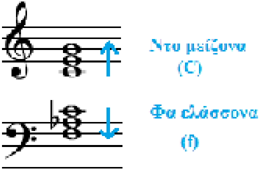
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1.Ως προς τη διάταξη:

- Οι μείζονες τριάδες παρουσιάζονται σε ευθεία κατάσταση, ενώ οι ελάσσονες σε αναστροφή.
- Οι μείζονες ξεκινούν από την Ντο μείζονα, ενώ οι ελάσσονες ξεκινούν από τη φα ελάσσονα.

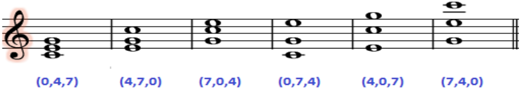
↓

Δυϊσμός (H. Riemann): μία μείζονα και μία ελάσσονα συγχορδία προέρχονται από την αντήχηση ενός θεμελιώδους ήχου.



Η δυϊκή αναπαράσταση των C και f.

2.Ως μουσική οντότητα: κάθε σύμφωνη τριάδα εμπεριέχει και τις 6 μεταθέσεις του συνόλου της.



Η δράση της T/I πάνω στο S

Για κάθε $s =< y_1, y_2, y_3 > \epsilon\, S$ έχουμε $T_n, I_n : S \to S$ όπου $n = 0, 1, ..., 11$:

$$\begin{aligned} T_n(s) &= T_n\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle T_n(y_1), T_n(y_2), T_n(y_3)\rangle = s' \,\epsilon\, S\,, \\ I_n(s) &= I_n\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle I_n(y_1), I_n(y_2), I_n(y_3)\rangle = s' \,\epsilon\, S \end{aligned} \qquad (15)$$

Με την T_n περνούμε:

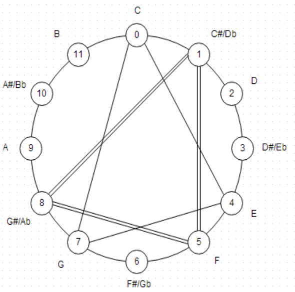
- από μία μείζονα τριάδα με βάση μ_1 στην μείζονα με βάση, $\mu_2 = \mu_1 + n \pmod{12}$, και
- από μία ελάσσονα τριάδα (με βάση ϵ_1) στην ελάσσονα με βάση, $\epsilon_2 = \epsilon_1 + n \pmod{12}$.

Με την I_n περνούμε:

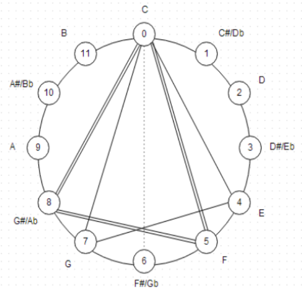
- από μία μείζονα με βάση μ_1 στην ελάσσονα με βάση, $\epsilon_2 = 5 + n - \mu_1 \pmod{12}$ και
- από μία ελάσσονα με βάση ϵ_1 στην μείζονα με βάση, $\mu_2 = 5 + n - \epsilon_1 \pmod{12}$.

Ο άξονας της αναστροφής διέρχεται από τα σημεία $n/2$, $6 + n/2$ βάσει των κορυφών.

Η δράση της T/I πάνω στο S



$T_1\langle 0,4,7\rangle = \langle 1,5,8\rangle$



$I_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,8,5\rangle$

- Αν δράσουμε τις 12 μετατοπίσεις $T_0, \ldots, T_{11}$ πάνω στη βασική $C = \langle 0,4,7\rangle$ παίρνουμε όλες τις μείζονες συγχορδίες.
- Αν δράσουμε τις 12 αναστροφές $I_0, \ldots, I_{11}$ πάνω στη $C = \langle 0,4,7\rangle$ παίρνουμε όλες τις ελάσσονες τριάδες.

Χρήσιμοι ορισμοί και θεωρήματα

Δράση ομάδας
Έστω X ένα σύνολο και G μία ομάδα. *Δράση* της G πάνω στο X λέμε μία απεικόνιση $\cdot : G \times X \to X$ τέτοια ώστε :

1. $e \cdot x = x$ για κάθε $x \epsilon X$,
2. $(g_1 g_2) \cdot (x) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ για κάθε $x \epsilon X$ και κάθε $g_1, g_2 \epsilon G$.

Απλά μεταβατική δράση
Μια δράση ομάδας ονομάζεται ***απλά μεταβατική*** αν είναι και απλή και μεταβατική, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε x και κάθε y, όπου $x, \ y \epsilon X$ υπάρχει ένα μοναδικό $g \ \epsilon \ G$ τέτοιο ώστε: $gx = y$.

Ομάδα - σταθεροποιητής
Η *ομάδα - σταθεροποιητής (stabilizer)* ενός στοιχείου x ορίζεται ως:

$$G_x = \{g \ \epsilon G \mid \quad gx = x\} \ \subset \ G \tag{16}$$

Θεώρημα Σταθεροποιητή Τροχιάς
Αν μία πεπερασμένη ομάδα G δρα πάνω σε ένα σύνολο X τότε:

$$|G| \ / \ |G_x| \ = \ |Orbit(\ x)| \, . \tag{17}$$

Η τροχιά της τριάδας C κάτω από τη δράση της T/I

Αν όλα τα στοιχεία της ομάδας T/I δράσουν πάνω στη συγχορδία $C = \langle 0,4,7\rangle$ παίρνουμε:

$T_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C$
$T_1\langle 0,4,7\rangle = \langle 1,5,8\rangle = C\sharp$
$T_2\langle 0,4,7\rangle = \langle 2,6,9\rangle = D$
$T_3\langle 0,4,7\rangle = \langle 3,7,10\rangle = D\sharp$
$T_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 4,8,11\rangle = E$
$T_5\langle 0,4,7\rangle = \langle 5,9,0\rangle = F$
$T_6\langle 0,4,7\rangle = \langle 6,10,1\rangle = F\sharp$
$T_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,11,2\rangle = G$
$T_8\langle 0,4,7\rangle = \langle 8,0,3\rangle = G\sharp$
$T_9\langle 0,4,7\rangle = \langle 9,1,4\rangle = A$
$T_{10}\langle 0,4,7\rangle = \langle 10,2,5\rangle = A\sharp$
$T_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,3,6\rangle = B$

$I_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,8,5\rangle = f$
$I_1\langle 0,4,7\rangle = \langle 1,9,6\rangle = f\sharp$
$I_2\langle 0,4,7\rangle = \langle 2,10,7\rangle = g$
$I_3\langle 0,4,7\rangle = \langle 3,11,8\rangle = g\sharp$
$I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 4,0,9\rangle = a$
$I_5\langle 0,4,7\rangle = \langle 5,1,10\rangle = a\sharp$
$I_6\langle 0,4,7\rangle = \langle 6,2,11\rangle = b$
$I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,3,0\rangle = c$
$I_8\langle 0,4,7\rangle = \langle 8,4,1\rangle = c\sharp$
$I_9\langle 0,4,7\rangle = \langle 9,5,2\rangle = d$
$I_{10}\langle 0,4,7\rangle = \langle 10,6,3\rangle = d\sharp$
$I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle = e$

$$\text{Άρα:}\quad \mathrm{Orbit(C)} = S \to |\mathrm{Orbit(C)}| = |S| = 24, \tag{18}$$

Πρόταση

Η δράση της ομάδας T/I πάνω στο σύνολο S είναι απλά μεταβατική.

Απόδειξη

- Λόγω της σχέσης (18) έχουμε:

$$|\mathrm{Orbit(C)}| = |S| = 24 = |T/I| \ , \tag{19}$$

  δηλαδή, κάτω από τη δράση της ομάδας T/I πάνω στο S υπάρχει μόνο μία τροχιά - όλο το σύνολο S. Άρα, η δράση της T/I πάνω στο S είναι μεταβατική.
- Με αντικατάσταση της σχέσης (19) στο Θ.Σ.Τ παίρνουμε:
  $|G_C| = 1 \ \rightarrow G_C = \{e\}$. Τότε, αν για κάποια τριάδα $s \in S$ έχουμε:
  $g's = gs \Rightarrow g = g'$, για $g, \ g' \in G$.
  Άρα, η δράση της T/I πάνω στο S είναι και απλή.

Άρα η δράση της ομάδας T/I πάνω στο S είναι απλά μεταβατική. □

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Ξεκινώντας από μία συγχορδία υπάρχει τρόπος να φτάσουμε σε οποιαδήποτε άλλη και ο τρόπος αυτός είναι μοναδικός.

Η *neo – Riemannian* ομάδα PLR

Η ομάδα *PLR* ή neo-Riemannian έχει τις βάσεις της στις συναρτήσεις P, L, R του Γερμανού θεωρητικού της μουσικής Hugo Riemann.

Οι νεο-Ρημανικές θεωρίες περί μουσικής (neo-Riemannian music theories) ξεκίνησαν να απασχολούν τους μουσικολόγους τις τελευταίες δεκαετίες - D.Lewin.

Γεννήθηκαν ως εργαλεία επίλυσης των προβλημάτων κατά την ανάλυση *τριαδικής υστερο-τονικής μουσικής* (Cohn).

Η μουσική αυτή περιλαμβάνει έργα:

- ρομαντικών και υστερορομαντικών συνθετών (π.χ. Wagner, Liszt) και μεταγεννέστερων συνθετών,
- «περάσματα» σε έργα κλασικών συνθετών (π.χ. Beethoven και Schubert).

Ορίζουμε τις συναρτήσεις P, L, R πάνω στο S με τη βοήθεια των αναστροφών I:

(Παράλληλη)

Η συνάρτηση $P: S \rightarrow S$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$P\langle y_1, y_2, y_3\rangle := I_{y_1+y_3}\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle y_3, y_1 - y_2 + y_3, y_1\rangle \tag{20}$$

ονομάζεται *Παράλληλη (Parallel)*.

(Ανταλλαγή προσαγωγέα)

Η συνάρτηση $L: S \rightarrow S$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$L\langle y_1, y_2, y_3\rangle := I_{y_2+y_3}\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle -y_1 + y_2 + y_3, y_2, y_3\rangle \tag{21}$$

ονομάζεται *Ανταλλαγή προσαγωγέα (Leading tone exchange)*.

(Σχετική)

Έστω $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}_{12}$. Η συνάρτηση $R: S \rightarrow S$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$R\langle y_1, y_2, y_3\rangle := I_{y_1+y_2}\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle y_2, y_1, y_1 + y_2 - y_3\rangle \tag{22}$$

ονομάζεται *Σχετική (Relative)*.

P, L, R: «συσχετισμένες» αναστροφές (*contextual inversions*), $\rightarrow$ η θέση του άξονα της αναστροφής εξαρτάται από την εισροή $< y_1, y_2, y_3 >$ (σε αντίθεση με τις αναστροφές I_n).

Σε κάθε περίπτωση είναι:

- P: ο άξονας περνά από τα σημεία $\frac{y_1+y_3}{2}$, $6+\frac{y_1+y_3}{2}$.
- L: ο άξονας περνά από τα σημεία $\frac{y_2+y_3}{2}$, $6+\frac{y_2+y_3}{2}$.
- R: ο άξονας περνά από τα σημεία $\frac{y_1+y_2}{2}$, $6+\frac{y_1+y_2}{2}$.

Και οι τρεις συναρτήσεις, ως αναστροφές, μας πηγαίνουν από μία μείζονα σε μία ελάσσονα και αντίστροφα, κρατώντας πάντα δύο νότες ίδιες αλλά αναστρέφοντας τις θέσεις τους.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μας διευκολύνει να θεωρούμε τα γνωστά σύμβολα '$+$' , '$-$' σαν ισοτιμία για τις μείζονες και τις ελάσσονες συγχορδίες, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, Ντο μείζονα $= C = C^+$, Ντο ελάσσονα $= c = C^-$.

Η δράση της P πάνω στο S

P από μία σύμφωνη τριάδα $\rightarrow$ μοναδική σύμφωνη τριάδα αντίθετης ομοτιμίας με ανεστραμμένες την πρώτη με την τρίτη νότα της αρχικής. Από μουσικής πλευράς, περνούμε από μία μείζονα στην ομώνυμη ελάσσονα και από μία ελάσσονα στην ομώνυμη μείζονα. *Ομώνυμες* ονομάζονται μία μείζονα και μία ελάσσονα συγχορδία αν συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα και αντίθετη ομοτιμία.

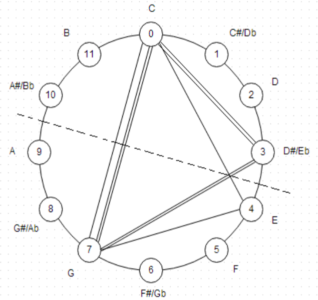
Παράδειγμα 1:

$$P(C^+) = P\langle 0,4,7\rangle = I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,3,0\rangle = C^-$$

και αντίστροφα,

$$P(C^-) = P\langle 7,3,0\rangle = I_7\langle 7,3,0\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^+.$$

Ο άξονας συμμετρίας περνά από τα σημεία: 3.5, 9.5.



Η μετάβαση: $C^+ \overset{P}{\longleftrightarrow} C^-$.

Η δράση της L πάνω στο S

L από μία σύμφωνη συγχορδία → στη μοναδική σύμφωνη αντίθετης ομοτιμίας, με ανεστραμμένες την δεύτερη με την τρίτη νότα της αρχικής.
Από μουσικής πλευράς περνούμε από μία μείζονα στην ελάσσονα με βάση 4 ημιτόνια πάνω από τη βάση της μείζονας και αντίστροφα.
Σε κάθε μετάβαση, η φωνή που κινείται οδηγεί τη βάση της μείζονας στην τρίτη νότα της ελάσσονας τριάδας →
περνούμε από την τονική της μείζονας κλίμακας στον προσαγωγέα της και αντίστροφα.

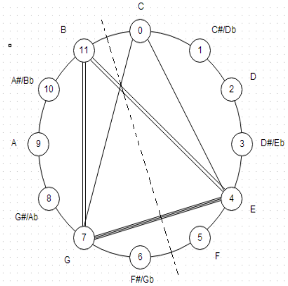
Παράδειγμα 2:

$$L(C^+) = L\langle 0,4,7\rangle = I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle = E^-$$

και αντίστροφα,

$$L(E^-) = L\langle 11,7,4\rangle = I_{11}\langle 11,7,4\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^+.$$

Ο άξονας συμμετρίας περνά από τα σημεία: 5.5, 11.5.



Η μετάβαση: $C^+ \overset{L}{\longleftrightarrow} E^-$.

Η δράση της R πάνω στο S

R: από μία σύμφωνη συγχορδία $\to$ στη μοναδική συγχορδία αντίθετης ομοτιμίας, με ανεστραμμένες την πρώτη με την δεύτερη νότα της αρχικής. Από μουσικής πλευράς περνούμε από μία μείζονα στην σχετική της ελάσσονα και αντίστροφα.
Μια μείζονα και μία ελάσσονα συγχορδία είναι *σχετικές* αν η βάση της ελάσσονας είναι 3 ημιτόνια κάτω από τη βάση της μείζονας.

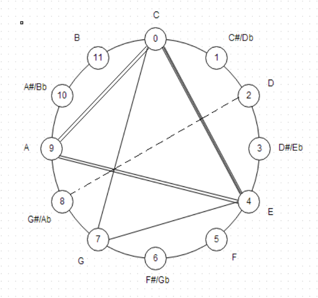
Παράδειγμα 3:

$$R(C^+) = R\langle 0,4,7\rangle = I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 4,0,9\rangle = A^-$$

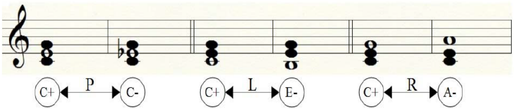
και αντίστροφα,

$$R(A^-) = R\langle 4,0,9\rangle = I_4\langle 4,0,9\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^+ .$$

Ο άξονας συμμετρίας περνά από τις κορυφές: 2, 8.



Η μετάβαση: $C^+ \overset{R}{\longleftrightarrow} A^-$.



Τα Παραδείγματα 1, 2, 3 στο πεντάγραμμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η διπλή εφαρμογή κάθε μίας από τις P, L, R πάνω σε μία σύμφωνη τριάδα δίνει ως ταυτοτικό αποτέλεσμα:

$$P^2 = e, \; L^2 = e, \; R^2 = e \; . \tag{23}$$

- Εκτός του ότι δύο νότες μένουν ίδιες, ακόμη και η φωνή που αλλάζει κάνει ιδιαίτερα μικρές κινήσεις parsimonious voice leading (Cohn) . Συγκεκριμένα, P, L: 1 ημιτόνιο, R: 2 ημιτόνια.

$$\downarrow$$

ΜΟΝΟ στις σύμφωνες τριάδες!

Η ομάδα PLR

Η ομάδα PLR

Η ***ομάδα*** PLR είναι η ομάδα της οποίας το σύνολο αποτελείται από όλες τις πιθανές συνθέσεις των συναρτήσεων P, L, R, με διμελή πράξη την σύνθεση συναρτήσεων.

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν μόνο 24 συνδυασμοί!

Αναζητούμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των P, L, R:

Από τη σχέση (23) δεν υπάρχουν μεμονωμένες άρτιες δυνάμεις των P, L, R

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις R, L σε μία συγχορδία για να αναλύσουμε τα αποτελέσματα.

(Η τροχιά της C^+ κάτω από τη δράση της PLR)

$$\begin{aligned}
R(C^+) &= A^- & R(LR)^6(C^+) &= D\sharp^- \\
LR(C^+) &= F^+ & (LR)^7(C^+) &= B^+ \\
R(LR)(C^+) &= D^- & R(LR)^7(C^+) &= G\sharp^- \\
(LR)^2(C^+) &= A\sharp^+ & (LR)^8(C^+) &= E^+ \\
R(LR)^2(C^+) &= G^- & R(LR)^8(C^+) &= C\sharp^- \\
(LR)^3(C^+) &= D\sharp^+ & (LR)^9(C^+) &= A^+ \\
R(LR)^3(C^+) &= C^- & R(LR)^9(C^+) &= F\sharp^- \\
(LR)^4(C^+) &= G\sharp^+ & (LR)^{10}(C^+) &= D^+ \\
R(LR)^4(C^+) &= F^- & R(LR)^{10}(C^+) &= B^- \\
(LR)^5(C^+) &= C\sharp^+ & (LR)^{11}(C^+) &= G^+ \\
R(LR)^5(C^+) &= A\sharp^- & R(LR)^{11}(C^+) &= E^- \\
(LR)^6(C^+) &= F\sharp^+ & (LR)^{12}(C^+) &= C^+
\end{aligned}$$

Από εδώ και πέρα τα αποτελέσματα επαναλαμβάνονται.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Οι 24 σύνθετες συναρτήσεις:

$$\{LR\ ,\ (LR)^2,\ (LR)^3\ ,\ (LR)^4\ ,\ (LR)^5\ ,\ (LR)^6\ ,\ (LR)^7\ ,\ (LR)^8\ ,$$
$$(LR)^9\ ,\ (LR)^{10}\ ,\ (LR)^{11}\ ,\ (LR)^{12}\ ,\ R\ ,\ R(LR)\ ,\ R(LR)^2\ ,$$
$$R(LR)^3\ ,\ R(LR)^4\ ,\ R(LR)^5\ ,\ R(LR)^6\ ,\ R(LR)^7\ ,$$
$$R(LR)^8\ ,\ R(LR)^9\ ,\ R(LR)^{10}\ ,\ R(LR)^{11}\}$$

  ανήκουν στο σύνολο L/R και η εφαρμογή τους πάνω στην C^+ μας δίνει όλο το σύνολο S. $\rightarrow$
  Άρα, οι συναρτήσεις αυτές είναι διακριτές και $|L/R| \geq 24$.

- Για τις $P, L, (LR)^{12}$ έχουμε:

$$P(C^+) = R(LR)^3(C^+) = C^-\ , \tag{24}$$

$$L(C^+) = R(LR)^{11}(C^+)\,, \tag{25}$$

$$(LR)^{12}(C^+) = L^2(C^+) = R^2(C^+) = (C^+)\,. \tag{26}$$

Λήμμα

Έστω $s \in S$. Για κάθε $g \in T/I$ και για κάθε $h \in PLR$ ισχύει:

$$gh(s) = hg(s)\,. \tag{27}$$

Πρόταση

Στο σύνολο PLR και για κάθε $s \in S$ ισχύουν:

1. Η συνάρτηση P μπορεί να γραφεί ως σύνθεση των R, L:

$$P(s) = R(LR)^3(s)\,. \tag{28}$$

2. Η συνάρτηση L μπορεί να γραφεί επίσης ως:

$$L(s) = R(LR)^{11}(s)\,. \tag{29}$$

3. Η συνάρτηση $(LR)^{12}$ αποτελεί ταυτοτικό στοιχείο:

$$(LR)^{12}(s) = (LR)^0(s) = L^2(s) = R^2(s) = s\,. \tag{30}$$

Θεώρημα

Το σύνολο $PLR = L/R$ εφοδιασμένο με τη σύνθεση συναρτήσεων ως διμελή πράξη, είναι ομάδα, τάξης 24 και

$$PLR = \{(LR)^n \mid n = 1, 2, ..., 12\} \cup \{R(LR)^n \mid n = 0, 1, ..., 11\} . \qquad (31)$$

Απόδειξη

- Από την Πρόταση έπεται ότι οποιαδήποτε άλλη σύνθετη συνάρτηση προκύπτει από τις L, R θα είναι ισοδύναμη με κάποια από τις 24 συναρτήσεις.
- Εφόσον η P μπορεί να εκφραστεί μέσω των $L, R \rightarrow \quad PLR = LR$

$PLR = \{(LR)^n \mid n = 1, 2..., 12\} \cup \{R(LR)^n \mid n = 0, 1, ..., 11\}$, και άρα:
$|PLR| = 24$.

συνέχεια απόδειξης ...

Πληρούνται τα αξιώματα της ομάδας:

1. *Κλειστότητα*: Η σύνθεση δύο στοιχείων της PLR δίνει στοιχείο της PLR:

$$\begin{aligned}(LR)^n \circ (LR)^m &= (LR)^{n+m \,(\mathrm{mod}\ 12)} \,\epsilon\, PLR\,,\\ R(LR)^n \circ (LR)^m &= R(LR)^{m+n \,(\mathrm{mod}\ 12)} \,\epsilon\, PLR\,,\\ (LR)^n \circ R(LR)^m &= R(LR)^{m-n \,(\mathrm{mod}\ 12)} \,\epsilon\, PLR\,,\\ R(LR)^n \circ R(LR)^m &= (LR)^{m-n \,(\mathrm{mod}\ 12)} \,\epsilon\, PLR\,.\end{aligned}$$

2. *Προσεταιριστική*: Ενδεικτικά για μία τριάδα $(LR)^n, (LR)^m, R(LR)^k \,\epsilon\, PLR$ όπου $n, m \,\epsilon\, \{1, 2, ..., 12\}$ και $k \,\epsilon\, \{0, 1, ..., 11\}$:

$$((LR)^n \circ (LR)^m) \circ R(LR)^k = (LR)^n \circ ((LR)^m) \circ R(LR)^k)$$

3. *Ταυτοτικό στοιχείο*: $e = (LR)^{12} \,\epsilon\, PLR$
4. *Αντίστροφο στοιχείο* : $((LR)^n)^{-1} = (LR)^{12-n (\mathrm{mod}\ 12)} \,\epsilon\, PLR.$
$(R(LR)^n)^{-1} = R(LR)^n\,.$ $\square$

Η δομή της ομάδας *PLR*

Υπολογίζουμε τους μεταθέτες της ομάδας *PLR*:

$$\begin{aligned}
[(LR)^n,(LR)^m] &= (LR)^n(LR)^m(LR)^{12-n}(LR)^{12-m}\\
&= e\,.
\end{aligned}$$

Άρα τα $(LR)^n$ μετατίθενται μεταξύ τους.

$$\begin{aligned}
[R(LR)^n,(LR)^m] &= R(LR)^n(LR)^m R(LR)^n(LR)^{12-m}\\
&= (LR)^{2(6-m)\ (\mathrm{mod}\ 12)}\,.
\end{aligned}$$

Άρα τα $R(LR)^n$, $(LR)^m$ μετατίθενται μόνο για $m=0,6$.

$$\begin{aligned}
[R(LR)^n,R(LR)^m] &= R(LR)^n R(LR)^m R(LR)^n R(LR)^m\\
&= (LR)^{2(m-n)\ (\mathrm{mod}\ 12)}
\end{aligned}$$

Άρα τα $R(LR)^n$, $R(LR)^m$ μετατίθενται μόνο για $m=n,n+6$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

- Η ομάδα *PLR* είναι μη αβελιανή (και μη κυκλική).
- Το σύνολο $\{(LR)^n \quad | \, n = 1, 2, ..., 12\}$ μαζί με τη διμελή πράξη είναι κυκλική υποομάδα με γεννήτορα το $(LR)^1$, δηλαδή $\langle (LR)^1 \rangle = (LR)^n$ άρα και αβελιανή.
- Το σύνολο $\{R(LR)^n \quad | \, n = 0, 1, ..., 11\}$ μαζί με τη διμελή πράξη δεν σχηματίζουν υποομάδα καθώς λείπει το ταυτοτικό στοιχείο.
- Ισχύει:

$$R(LR)^n = R(LR)^{m+n \,(\mathrm{mod}\, 12)}(LR)^{12-m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \, . \tag{32}$$

  Άρα για κάθε $n = 0, 1, ..., 11$ παίρνουμε το αντίστοιχο $m = 11 - n$ και βρίσκουμε την $R(LR)^n$ συναρτήσει των L, LR (γεννήτορες)

Η δομή της PLR παραπέμπει στην D_{12}.

Πρόταση

Η ομάδα PLR είναι ισόμορφη με τη D_{12} : $PLR \simeq D_{12}$.

Ορίζουμε: $\xi : D_{12} \to PLR$ δίνοντας τις εικόνες των γεννητόρων :

$$\xi \ : \quad C \ \to \ LR \,, \quad \Sigma \ \to \ L = R(LR)^{11} \,. \tag{33}$$

Ο ομομορφισμός θα πρέπει να σέβεται τις σχέσεις (10):

$$\xi({C_1}^{12}) = \xi(C_1)^{12} = (LR)^{12} = e \,,$$
$$\xi({\Sigma_0}^2) = \xi(\Sigma_0)^2 = L^2 = e \,,$$
$$\xi(\Sigma_0 C_1 {\Sigma_0}^{-1}) = \xi(\Sigma_0)\xi(C_1)\xi({\Sigma_0}^{-1}) = \xi(\Sigma_0)\xi(C_1)\xi(\Sigma_0)^{-1} = L \circ LR \circ L$$
$$= L^2(RL) = RL = (LR)^{-1} = {C_1}^{-1} \,.$$

- Όλα τα στοιχεία της PLR είναι εικόνες μέσω του ξ,
- $|PLR| = |D_{12}|$

$\Bigg\}$ ξ : ισομορφισμός $\to$ $PLR \simeq D_{12}$

	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R
e	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R
(LR)	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11
(LR)^2	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10
(LR)^3	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9
(LR)^4	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8
(LR)^5	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7
(LR)^6	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6
(LR)^7	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5
(LR)^8	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4
(LR)^9	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3
(LR)^10	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2
(LR)^11	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)
R(LR)^11	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)
R(LR)^10	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2
R(LR)^9	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3
R(LR)^8	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4
R(LR)^7	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5
R(LR)^6	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6
R(LR)^5	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7
R(LR)^4	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8
R(LR)^3	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9
R(LR)^2	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10
R(LR)	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11
R	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e

Ο πίνακας της ομάδας *PLR*.

Τελικά, λόγω μεταβατικής ιδιότητας του ισομορφισμού:

Οι ομάδες PLR , T/I και D_{12} είναι ισόμορφες

.

T/I	D_{12}	PLR
${T_1}^{12} = T_0 = e$	$C_1^{12} = e$	$(LR)^{12} = e$
${I_0}^2 = T_0 = e$	${\Sigma_0}^2 = e$	$L^2 = e$
$T_1 * I_0 * T_1 * I_0 = e$	$C_1 * \Sigma_0 * C_1 * \Sigma_0 = e$	$L * (LR) * L * (LR) = e$

Οι σχέσεις των γεννητόρων για τις ομάδες T/I, D_{12}, PLR .

Η δράση της PLR πάνω στο S

Μέχρι το σημείο αυτό:
μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τη δράση των P, L, R πάνω σε οποιαδήποτε σύμφωνη τριάδα.

Όμως, υπολογισμός δράσης ενός τυχαίου στοιχείου της PLR πάνω σε μία σύμφωνη τριάδα $\rightarrow$ περίπλοκος γιατί:

- τα στοιχεία της PLR είναι συνθέσεις συναρτήσεων
- και δεν υπάρχει κανόνας γενίκευσης.

Παράδειγμα: $R(LR)^{10}\langle 2, 10, 7\rangle$
Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει μόνο έμμεσα, $\rightarrow$ εφαρμόζοντας όλες τις «προηγούμενες» συναρτήσεις πάνω στην $\langle 2, 10, 7\rangle$ διαδοχικά.

Για ευκολότερη χρήση στην μουσική ανάλυση $\rightarrow$ οι μετασχηματισμοί γίνονται γραφικά.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε δύο γραφήματα που διευκολύνουν την πλοήγηση μεταξύ των συμφώνων συγχορδιών με τη βοήθεια της PLR.

Πρόταση

Η δράση της ομάδας *PLR* πάνω στο σύνολο S είναι απλά μεταβατική.

Απόδειξη

- Από την τροχιά της C^+:

$$|\text{Orbit(C)}| = |S| = 24 = |T/I| \, , \tag{34}$$

  δηλαδή, κάτω από τη δράση της ομάδας *PLR* πάνω στο S υπάρχει μόνο μία τροχιά - όλο το σύνολο S. Άρα, η δράση της *PLR* πάνω στο S είναι μεταβατική.
- Από το Θ.Σ.Τ για $G = PLR$ και $x = C^+$ παίρνουμε : $|G_C| = 1$. $\rightarrow$ η δράση της *PLR* πάνω στο S είναι απλή.

Άρα η δράση της ομάδας *PLR* πάνω στο S είναι απλά μεταβατική. $\square$

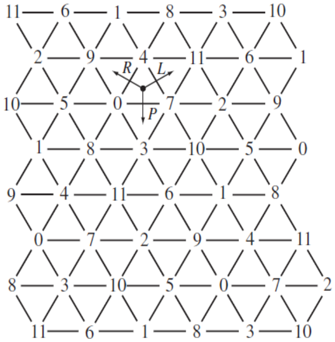
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Ξεκινώντας από μία συγχορδία υπάρχει τρόπος να φτάσουμε σε οποιαδήποτε άλλη και ο τρόπος αυτός είναι μοναδικός.

Οι γεωμετρικές απεικονίσεις της δράσης της PLR πάνω στο S

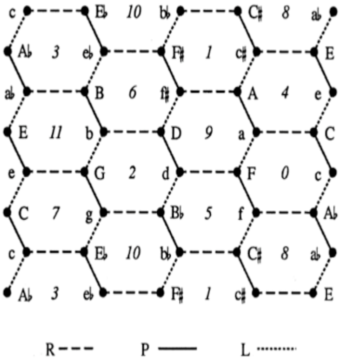
Τα 2 σημαντικότερα γραφήματα:

- Tonnetz



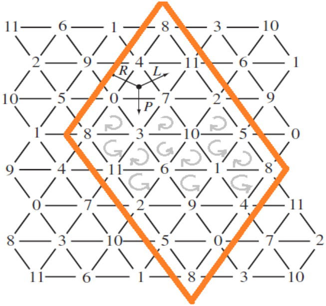
Τα 2 σημαντικότερα γραφήματα:

- Chickenwire

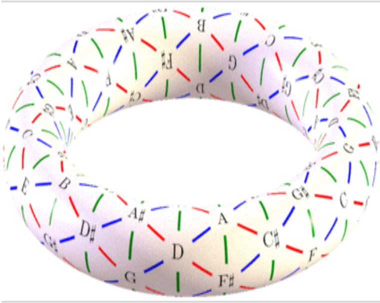


Το γράφημα Tonnetz

Ιστορικά: L. Euler → A. Oettingen, H. Riemann → B. Hyer, D. Lewin, R. Cohn



Το δισδιάστατο neo-Riemannian Tonnetz.



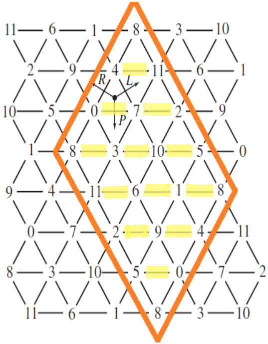
Ο τόρος neo-Riemannian.

- Αντιστοίχιση των νοτών με το $\mathbb{Z}_{12}$ → γράφημα: διπλά περιοδικό. Ενώνοντας τις παράλληλες πλευρές σε μιά θεμελιώδη δομή → τόρο.
- Κάθε κορυφή του πλέγματος: κλάση φθόγγων.
- Κάθε τρίγωνο: σύμφωνη τριάδα.
- Μείζονες - ελάσσονες τριάδες → τρίγωνα αντίθετου προσανατολισμού

Άξονες

- Ο οριζόντιος άξονας των πέμπτων (7 ημιτόνια) $\rightarrow$ κύκλο. Η μετάθεση του $\mathbb{Z}_{12}$ λόγω της T_7 $\rightarrow$ κύκλος:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5) \; .$$



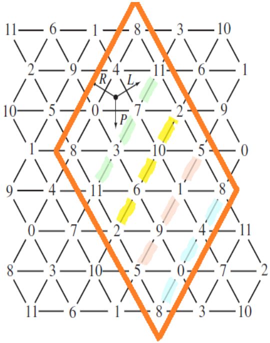
Άξονες

- Ο οριζόντιος άξονας των πέμπτων (7 ημιτόνια) $\rightarrow$ κύκλο. Η μετάθεση του $\mathbb{Z}_{12}$ λόγω της T_7 $\rightarrow$ κύκλος:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5) \ .$$

- Ο διαγώνιος άξονας των τρίτων μεγάλων (4 ημιτόνια) $\rightarrow$ 4 κύκλους. Η μετάθεση του $\mathbb{Z}_{12}$ λόγω της T_4 $\rightarrow$ γινόμενο 4 ξένων κύκλων:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (0, 4, 8)(1, 5, 9)(2, 6, 10)(3, 7, 11) \ .$$



Άξονες

- Ο οριζόντιος άξονας των πέμπτων (7 ημιτόνια) $\rightarrow$ κύκλο. Η μετάθεση του $\mathbb{Z}_{12}$ λόγω της T_7 $\rightarrow$ κύκλος:

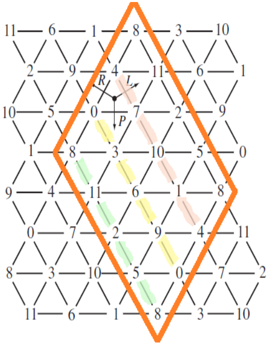
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (0,7,2,9,4,11,6,1,8,3,10,5) \ .$$

- Ο διαγώνιος άξονας των τρίτων μεγάλων (4 ημιτόνια) $\rightarrow$ 4 κύκλους. Η μετάθεση του $\mathbb{Z}_{12}$ λόγω της T_4 $\rightarrow$ γινόμενο 4 ξένων κύκλων:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (0,4,8)(1,5,9)(2,6,10)(3,7,11) \ .$$

- Ο διάγωνιος άξονας των τρίτων μικρών (3 ημιτόνια) $\rightarrow$ 3 κύκλους. Η μετάθεση του $\mathbb{Z}_{12}$ λόγω της T_3 $\rightarrow$ σαν γινόμενο 3 ξένων κύκλων:

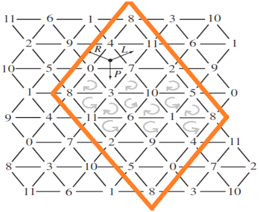
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (0,3,6,9)(1,4,7,10)(2,5,8,11) \ .$$



Η πλοήγηση στο TONNETZ μέσω των P, L, R

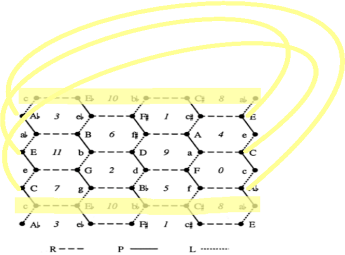
Κάθε μία από τις P, L, R αναστρέφει ένα τρίγωνο ως προς μία πλευρά του - την πλευρά αυτή που ενώνει τις κοινές νότες - και το προβάλλει πάνω σε ένα γειτονικό τρίγωνο με το οποίο μοιράζεται αυτήν την πλευρά.

1. P: αναστρέφει ένα τρίγωνο ως προς τον οριζόντιο άξονα των πέμπτων και περνούμε στη ομώνυμη μείζονα/ελάσσονα.
   Για παράδειγμα, $C^+ = \langle 0, 4, 7\rangle \to \langle 0, 3, 7\rangle = C^-$.
2. L: αναστρέφει ένα τρίγωνο ως προς τον άξονα των τρίτων μικρών και αν ξεκινούμε από μείζονα περνούμε στην ελάσσονα μίας τρίτης μικρής πάνω και αντίστροφα.
   Για παράδειγμα, $\langle 0, 4, 7\rangle \to \langle 11, 7, 4\rangle = E^-$.
3. R: αναστρέφει ένα τρίγωνο ως προς τον άξονα των τρίτων μεγάλων και περνούμε στη σχετική μείζονα / ελάσσονα.
   Για παράδειγμα, $\langle 0, 4, 7\rangle \to \langle 4, 0, 9\rangle = A^-$.

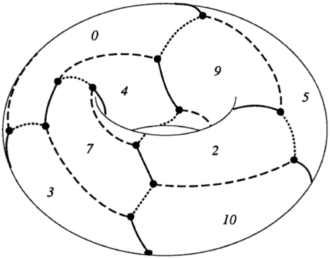


Το γράφημα Chickenwire

1998: Douthett&Steinbach- ονομασία των εξαγωνικών κυψέλων



Το δισδιάστατο Chickenwire.



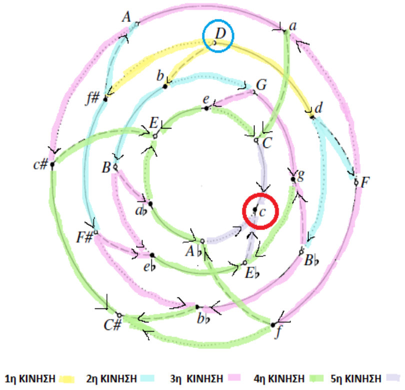
Ο τόρος Chickenwire.

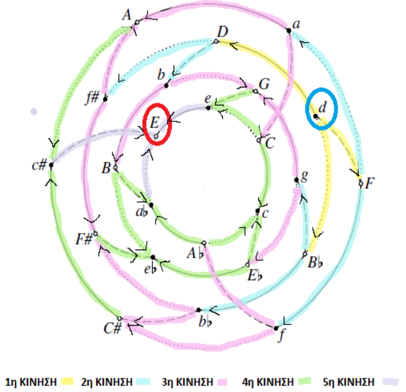
- Κορυφές: σύμφωνες τριάδες - 2 κορυφές ενώνονται με μία πλευρά όταν έχουν δύο κλάσεις φθόγγων κοινές
- Από μία κορυφή → σε άλλες 3 → εξαγωνικό πλέγμα (chickenwire)
- Κυψέλη: ακέραιος - κλάση φθόγγων που έχουν κοινή οι 6 τριάδες
- Πλευρές: P, L, R
- Με την αντιστοίχιση των κλάσεων φθόγγων με το $\mathbb{Z}_{12}$ → γράφημα διπλά περιοδικό → τόρος

Με 5 κινήσεις μπορούμε να καλύψουμε όλη την επιφάνεια του τόρου:

Πρόταση

Για κάθε σύμφωνη τριάδα υπάρχει μία και μόνο μία άλλη σύμφωνη τριάδα που η ελάχιστη απόσταση της από την αρχική είναι πέντε κινήσεις (πλευρές).





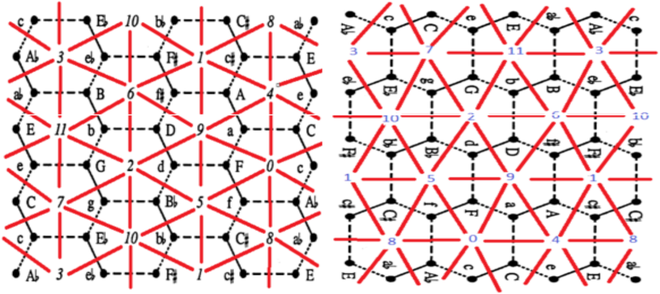
Τα Tonnetz και Chickenwire ως δυϊκά γραφήματα

Δυϊκό γράφημα

Δυϊκό γράφημα ενός γραφήματος G είναι ένα γράφημα G', το οποίο έχει μία κορυφή για κάθε χωρίο του G και μία πλευρά που ενώνει δύο γειτονικά χωρία για κάθε πλευρά του G.

Πρόταση

Τα γραφήματα Tonnetz και Chickenwire είναι δυϊκά γραφήματα.



4 ειδών χαρακτηριστικοί μουσικοί κύκλοι

Από τα 2 γραφήματα

$\downarrow$

παίρνουμε 4 ειδών χαρακτηριστικούς κύκλους τριάδων.

Αυτοί είναι:

1. Οι 4 εξατονικοί κύκλοι,
2. Οι 3 οκτατονικοί κύκλοι,
3. Ο Χαμιλτονιανός κύκλος,
4. Οι 12 εξαγωνικές κυψέλες.

Οι εξατονικοί κύκλοι

Ταυτίζοντας τις 2 οριζόντιες πλευρές στο βασικό χωρίο του Chickenwire

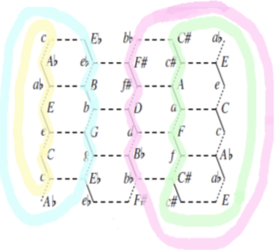
↓

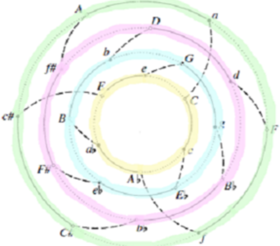
4 κύκλοι: (H_0), (H_1), (H_2), (H_3)

↓

εξατονικοί

τα στοιχεία τους ενώνονται με πλευρές:
εναλλάξ συνεχείς (P) και με κουκκίδες (L)





Η διαδικασία εύρεσης του κάθε κύκλου ισοδυναμεί με εφαρμογή του συνόλου συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} L/P &= \{P\,,\, LP\,,\, PLP\,,\, LPLP\,,\, PLPLP\,,\, LPLPLP\} \\ &= \{(LP)^n \mid n = 1,2,3\} \cup \{P(LP)^n \mid n = 1,2,3\} \end{aligned} \tag{35}$$

σε κάθε αρχική συγχορδία.

Πρόταση

1. Το σύνολο $L/P \subseteq PLR$, με $|LP| = 6$, περιέχει όλες τις πιθανές συνθέσεις των L, P.
2. Το σύνολο L/P εφοδιασμένο με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων είναι υποομάδα της PLR.

Πρόταση

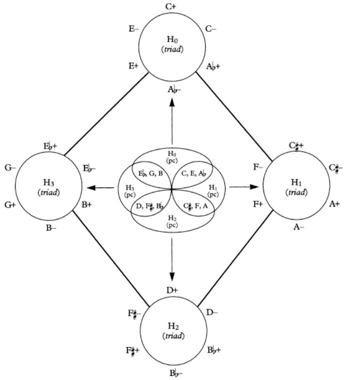
Οι τέσσερις εξατονικοί κύκλοι (H_0), (H_1), (H_2), (H_3) αποτελούν τις τροχιές που δημιουργούνται κάτω από τη δράση της υποομάδας L/P πάνω στο σύνολο S.

Ισχύει ότι: $S = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3$

Το σύνολο των κλάσεων φθόγγων μέσα σε ένα εξατονικό κύκλο → εξατονικό σύστημα

- ⋆ Εξατονικοί κύκλοι και
- ⋆ εξατονικά συστήματα τους

} ΥΠΕΡΕΞΑΤΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ



Το υπερεξατονικό σύστημα.

Μουσικό παράδειγμα - Ο κύκλος (H_1) στον Brahms

1ο Κονσέρτο για βιολί και πιάνο, *op*.102, μέτρα: 270-278

Οι οκτατονικοί κύκλοι

Ταυτίζοντας τις 2 κάθετες πλευρές στο βασικό χωρίο του Chickenwire

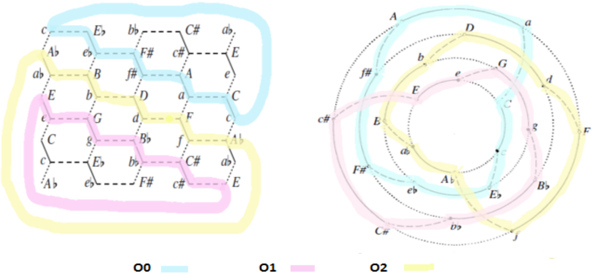
↓

3 κύκλοι: (O_0), (O_1), (O_2)

↓

οκτατονικοί

τα στοιχεία τους ενώνονται με πλευρές:
εναλλάξ διακεκομμένες (R) και συνεχείς (P)



Η διαδικασία εύρεσης κάθε κύκλου ισοδυναμεί με εφαρμογή του συνόλου συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} R/P = \{&P\,,\ RP\,,\ PRP\,,\ RPRP\,,\ PRPRP\,,\ RPRPRP\,,\ PRPRPRP, \\ &RPRPRPRPRP\} \\ = \{&(RP)^n \mid n = 1,2,3,4\} \cup \{P(RP)^n \mid n = 0,1,2,3\} \end{aligned} \tag{36}$$

σε κάθε αρχική συγχορδία.

Πρόταση

1. Το σύνολο $R/P \subseteq PLR$, με $|RP| = 8$, περιέχει όλες τις πιθανές συνθέσεις των R, P.
2. Το σύνολο R/P εφοδιασμένο με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων είναι υποομάδα της PLR.

Πρόταση

Οι τρείς οκτατονικοί κύκλοι (O_0), (O_1), (O_2) αποτελούν τις τροχιές που δημιουργούνται κάτω από τη δράση της υποομάδας R/P πάνω στο σύνολο S.

Ισχύει: $S = O_0 \cup O_1 \cup O_2$

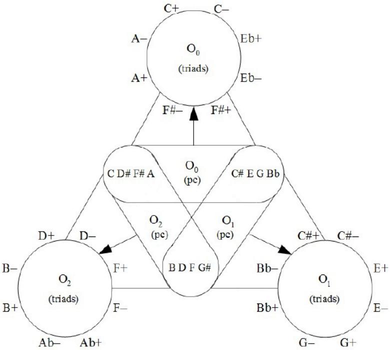
Το σύνολο των κλάσεων φθόγγων μέσα σε ένα οκτατονικό κύκλο

↓

οκτατονικό σύστημα

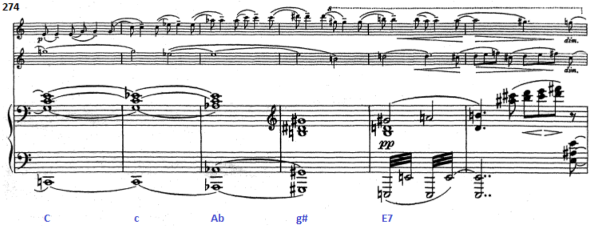
- ⋆ Οκτατονικοί κύκλοι και
- ⋆ οκτατονικά συστήματα τους

} ΥΠΕΡΟΚΤΑΤΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ



Το υπεροκτατονικό σύστημα.

Μουσικό παράδειγμα - Ο κύκλος (O_0) στον SCHUBERT



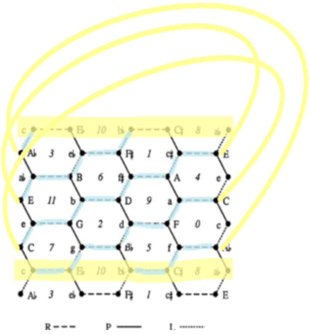
Η ακολουθία των τριάδων στα πρώτα μέτρα της Ουβερτούρας *Die Zauberharfe*.

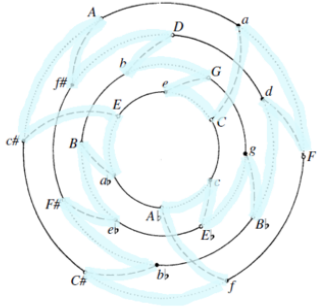
Ο Χαμιλτονιανός κύκλος

Ο κύκλος τάξης 24 - τα στοιχεία του ενώνονται με πλευρές εναλλάξ με κουκκίδες (L) και διακεκομμένες (R).

Χαμιλτονιανός κύκλος: περνάει από όλα τα στοιχεία-κορυφές του τόρου ακριβώς μία φορά.

Αν εφαρμόσω εναλλάξ τις L, R πάνω σε μία συγχορδία τελικά παίρνω τη δράση όλης της ομάδας $PLR = L/R$ πάνω στο S.

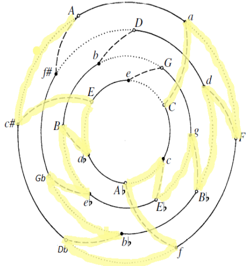




Ο Χαμιλτονιανός κύκλος.

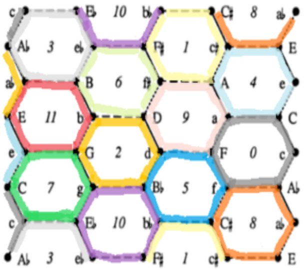
Μουσικό παράδειγμα - BEETHOVEN

9η Συμφωνία του Beethoven, μεταγραφή για 2 πιάνα, μ. 137-176.



Οι εξαγωνικές κυψέλες

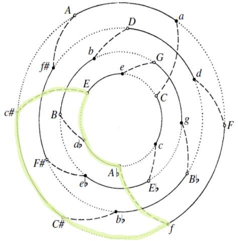
Οι εξαγωνικές κυψέλες: 12 κύκλοι με μήκος 6 που τα στοιχεία τους ενώνονται με πλευρές εναλλάξ με κουκκίδες (L), διακεκομμένες (R) και συνεχείς (P) στο γράφημα Chickenwire. Οι τριάδες σε κάθε κυψέλη έχουν μία κλάση φθόγγων κοινή → όνομα κάθε κυψέλης.



Οι εξαγωνικές κυψέλες

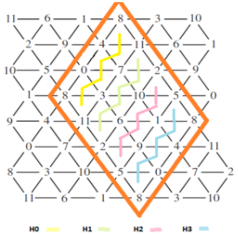
Μουσικό παράδειγμα - Ο κύκλος (8) στον Verdi

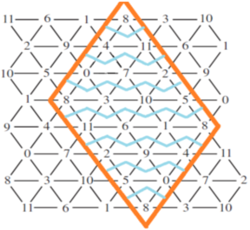
Η ακολουθία των τριάδων στο *Ah si, ben mio* της τρίτης πράξης της όπερας *Il Trovatore*.



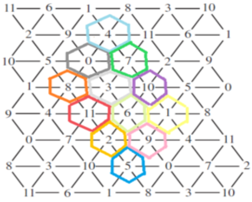
Ο κύκλος (8) πάνω σε μία κάτοψη του τόρου.

Οι κύκλοι που εξετάσαμε ως κύκλοι - «κορδέλες» πάνω στο Tonnetz





Ο Χαμιλτονιανός Κύκλος



Οι εξαγωνικές κυψέλες

Οι 4 χαρακτηριστικοί κύκλοι πάνω στο Tonnetz.

Οι T/I, PLR ως δυϊκές ομάδες

Οι δράσεις των T/I και PLR περιέχουν διαφορετικά σύνολα μεταθέσεων

$T/I \sim PLR \quad \rightarrow$ Οι δράσεις τους πάνω στο S δεν είναι ισοδύναμες!

Λήμμα

Μία δράση μίας ομάδας G πάνω σε ένα σύνολο X είναι ισοδύναμη με έναν ομομορφισμό $\rho: \; G \rightarrow Sym(X)$.

Πρόταση

Οι δράσεις των T/I και PLR περιέχουν διαφορετικά σύνολα μεταθέσεων του S.

Απόδειξη

Από Λήμμα $\rightarrow$ κάθε μία από τις 2 δράσεις γεννά έναν ομομορφισμό :

$$\lambda : T/I \rightarrow Sym(S) \quad , \qquad \rho : PLR \rightarrow Sym(S)\,.$$

Επειδή λ, ρ: 1-1 (λόγω απλής μεταβατικότητας) $\rightarrow$

$T/I, PLR \leq Sym(S)$, $|Sym(S)| = 24!$ $\quad \rightarrow$ 24 μεταθέσεις του S η καθεμία.

Οι μεταθέσεις του S λόγω της δράσης της T/I

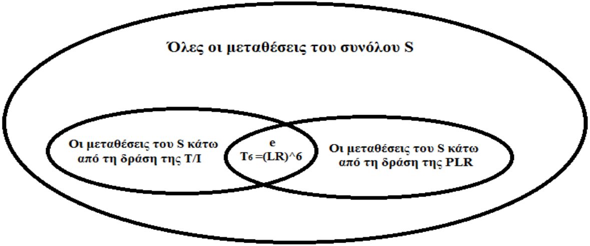
S	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>
T_0	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>
T_1	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>
T_2	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>
T_3	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>
T_4	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>
T_5	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>
T_6	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>
T_7	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>
T_8	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>
T_9	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>
T_{10}	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>
T_{11}	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>
I_0	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<2,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>
I_1	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>
I_2	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>
I_3	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>
I_4	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>
I_5	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>
I_6	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>
I_7	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>
I_8	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>
I_9	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>

Οι μεταθέσεις του συνόλου S κάτω από τη δράση της ομάδας PLR

S	(	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	)
(LR)^0	(	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	)
(LR)^1	(	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	)
(LR)^2	(	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	)
(LR)^3	(	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	)
(LR)^4	(	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	)
(LR)^5	(	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	)
(LR)^6	(	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	)
(LR)^7	(	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	)
(LR)^8	(	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	)
(LR)^9	(	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	)
(LR)^10	(	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	)
(LR)^11	(	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	)
R(LR)^11	(	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	)
R(LR)^10	(	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	)
R(LR)^9	(	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	)
R(LR)^8	(	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	)
R(LR)^7	(	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	)
R(LR)^6	(	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	)
R(LR)^5	(	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	)
R(LR)^4	(	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	)
R(LR)^3	(	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	)
R(LR)^2	(	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	)
R(LR)^1	(	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	)

Συνέχεια απόδειξης...

Από πίνακες μεταθέσεων → Μόνο τα ταυτοτικά και τα $T_6, (LR)^6$ δίνουν ίδιες μεταθέσεις του S.□.



Τα σύνολα των μεταθέσεων του S κάτω από τη δράση των T/I και PLR.

Οι T/I και PLR είναι δυϊκές ομάδες

(Δυϊκές ομάδες κατά *Lewin*)

Έστω $Sym(X)$ η συμμετρική ομάδα πάνω στο σύνολο X. Δύο υποομάδες G, H της $Sym(X)$ ονομάζονται *δυϊκές ομάδες* αν οι φυσικές τους δράσεις πάνω στο σύνολο X είναι απλά μεταβατικές και αν κάθε μία είναι ο κεντροποιητής της άλλης, δηλαδή:

$$C_{Sym(S)}(G) = H \quad , \quad C_{Sym(S)}(H) = G \, .$$

(Κεντροποιητής)
Έστω G ομάδα και έστω: $X \subseteq G$. Το σύνολο όλων των στοιχείων της G που μετατίθενται με κάθε στοιχείο του X ονομάζεται ***κεντροποιητής του X εντός της G*** και ορίζεται από τη σχέση:

$$C_G(X) := \{g \epsilon G \mid gx = xg, \, x \epsilon X\} \, . \qquad (37)$$

Θεώρημα

Οι T/I και PLR είναι δυϊκές ομάδες.

Απόδειξη
Αρκεί να δείξουμε ότι η PLR είναι ο κεντροποιητής της T/I και αντίστροφα.

- Ο κεντροποιητής της T/I εντός της $Sym(S)$ είναι:

$$C_{Sym(S)}(T/I) = \{h \,\epsilon\, Sym(S) \mid \quad hg = gh\,,\ \forall\ g \,\epsilon\, T/I\}\,,$$

Εφόσον έχουμε δείξει ότι τα στοιχεία των 2 ομάδων μετατίθενται:

$$\begin{aligned} C_{Sym(S)}(T/I) &\supseteq PLR \rightarrow \\ |C_{Sym(S)}(T/I)| &\geq |PLR| = 24\,. \end{aligned} \tag{38}$$

- Από Θ.Σ.Τ : $\frac{|C_{Sym(S)}(T/I)|}{|C_{Sym(S)}(T/I)_s|} \leq 24\,.$
- Αποδεικνύουμε ότι $|C_{Sym(S)}(T/I)_s| = 1$, και άρα:

$$|C_{Sym(S)}(T/I)| \leq 24\,. \tag{39}$$

Άρα από σχέσεις (38),(39) $\rightarrow \quad C_{Sym(S)}(T/I) = PLR$
Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $C_{Sym(S)}(PLR) = T/I \quad \square$.

Οι δυϊκές ομάδες και οι δεξιές και αριστερές κανονικές αναπαραστάσεις

Αριστερή κανονική αναπαράσταση ομάδας

Έστω G ομάδα. Θεωρούμε την απεικόνιση $\lambda : G \to Sym(G)$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\lambda(g) = \lambda_g \;, \quad g \epsilon G. \tag{40}$$

Η απεικόνιση λ είναι μονομορφισμός και ονομάζεται ***αριστερή κανονική αναπαράσταση της G***.

Δεξιά κανονική αναπαράσταση ομάδας

Έστω G ομάδα. Θεωρούμε την απεικόνιση $\rho : G \to Sym(G)$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho(g) = \rho_g \;, \quad g \epsilon G. \tag{41}$$

Η απεικόνιση ρ είναι μονομορφισμός και ονομάζεται ***δεξιά κανονική αναπαράσταση της G***.

Θεώρημα (Cayley)

Αν G ομάδα, τότε παράγονται δυϊκές ομάδες μέσω των δύο εμφυτεύσεων της G στην $Sym(G)$, ως αριστερές και δεξιές δράσεις της G στον εαυτό της. Επιπλέον, όλες οι δυϊκές ομάδες γεννιούνται με αυτόν τον τρόπο.

Κατασκευή της δυϊκής ομάδας

Για κάθε πεπερασμένη ομάδα : δρά απλά μεταβατικά πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο $S \rightarrow$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την δυϊκή της.

Θεώρημα

(Κατασκευή της δυϊκής ομάδας στην πεπερασμένη περίπτωση κατά Fiore-Noll.)

Έστω G πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρά απλά μεταβατικά πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο S. Καθορίζουμε ένα σημείο $s_0 \in S$ και θεωρούμε τις δύο εμφυτεύσεις:

$$\begin{aligned} \lambda : \; G &\longrightarrow Sym(S) \\ g &\longmapsto (s \mapsto gs)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : \; G &\longrightarrow Sym(S) \\ g &\longmapsto (hs_0 \mapsto hg^{-1}s_0)\,. \end{aligned}$$

Τότε, οι εικόνες $\lambda(G)$ και $\rho(G)$ είναι δυϊκές ομάδες στην $Sym(S)$. Η 1-1 απεικόνιση ρ εξαρτάται από την επιλογή του s_0, ενώ η εικόνα $\rho(G)$ όχι.

Παράδειγμα

(Κατασκευή της ομάδας PLR)

Αν στην κατασκευή του Θεωρήματος θεωρήσουμε $G = T/I$, S το σύνολο όλων των συμφώνων τριάδων και $s_0 = C^+ = \langle 0, 4, 7\rangle$, τότε η $\rho(G)$ είναι η ομάδα PLR.

Πράγματι, αν $g, h \in T/I$, ισχύουν:

$$\text{για} \quad g = T_n,\ h = T_n, \quad \text{έχουμε:} \quad T_n \longmapsto (T_n s_0 \mapsto T_n T_{12-n} s_0) \tag{42}$$

$$\text{για} \quad g = T_n,\ h = I_n, \quad \text{έχουμε:} \quad T_n \longmapsto (I_n s_0 \mapsto I_n T_{12-n} s_0) \tag{43}$$

$$\text{για} \quad g = I_n,\ h = T_n, \quad \text{έχουμε:} \quad I_n \longmapsto (T_n s_0 \mapsto T_n I_n s_0) \tag{44}$$

$$\text{για} \quad g = I_n,\ h = I_n, \quad \text{έχουμε:} \quad I_n \longmapsto (I_n s_0 \mapsto I_n I_n s_0)\,. \tag{45}$$

(!) $T_n\langle 0, 4, 7\rangle$ $\rightarrow$ όλες τις μείζονες
$I_n\langle 0, 4, 7\rangle$ $\rightarrow$ όλες τις ελάσσονες τριάδες

- (42): μείζονα $\rightarrow$ μείζονα
- (43): ελάσσονα $\rightarrow$ ελάσσονα
- (44): μείζονα $\rightarrow$ ελάσσονα
- (45): ελάσσονα $\rightarrow$ μείζονα

Οι συναρτήσεις P, L, R αντιστοιχούν σε δεξιό πολλαπλασιασμό με τις I_7, I_{11}, I_4.

P: για $n = 0, 1, ..., 11$:

$$P: \quad T_n\langle 0,4,7\rangle \mapsto T_nI_7\langle 0,4,7\rangle \quad \text{και} \quad I_n\langle 0,4,7\rangle \mapsto I_nI_7\langle 0,4,7\rangle\,,$$

για παράδειγμα,

$$T_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle \overset{P}{\mapsto} T_0I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,3,0\rangle$$
$$I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,3,0\rangle \overset{P}{\mapsto} I_7I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle\,.$$

L: για $n = 0, 1, ..., 11$:

$$L: \quad T_n\langle 0,4,7\rangle \mapsto T_nI_{11}\langle 0,4,7\rangle \quad \text{και} \quad I_n\langle 0,4,7\rangle \mapsto I_nI_{11}\langle 0,4,7\rangle\,,$$

για παράδειγμα,

$$T_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle \overset{L}{\mapsto} T_0I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle$$
$$I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle \overset{L}{\mapsto} I_{11}I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle\,.$$

R: για $n = 0, 1, ..., 11$:

$$R: \quad T_n\langle 0,4,7\rangle \mapsto T_nI_4\langle 0,4,7\rangle \quad \text{και} \quad I_n\langle 0,4,7\rangle \mapsto I_nI_4\langle 0,4,7\rangle\,,$$

για παράδειγμα,

$$T_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle \overset{R}{\mapsto} T_0I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 4,0,9\rangle$$
$$I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle \overset{R}{\mapsto} I_4I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle\,.$$

Εφαρμογή της δυϊκότητας των T/I και PLR στη μουσική ανάλυση

Λόγω της δυϊκότητας των T/I, PLR:

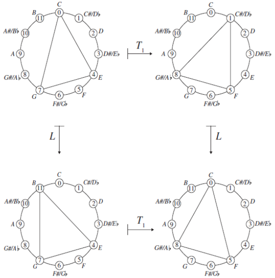
- τα στοιχεία της T/I μετατίθενται με τα στοιχεία της PLR και
- τα μόνα στοιχεία της $Sym(S)$ με την ιδιότητα αυτή, και αντιστρόφως.

Για κάθε $g \in T/I$, $h \in PLR$ και $s \in S$ έχουμε: $g\,h(s) = h\,g(s)$.

Αποτύπωση δυϊκότητας γραφικά σε μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & S \arrow[d, "h"] \\ S \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

Αναλυτικό Παράδειγμα:



$\rightarrow$ Όποιο μονοπάτι κι αν διαλέξουμε $\rightarrow$ ίδιο αποτέλεσμα.

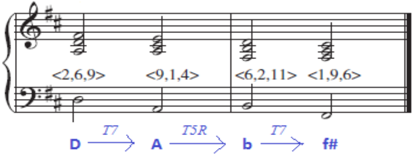
$\downarrow$

Κάθε διάγραμμα με κορυφές στοιχεία του S, με κάθετα βέλη στην PLR και οριζόντια βέλη στην T/I $\rightarrow$ θα μετατίθεται.

$\downarrow$

Η σύνδεση των 2 ομάδων μας επιτρέπει: να χρησιμοποιούμε τα στοιχεία τους ταυτόχρονα στην ανάλυση των σχέσεων μεταξύ κάθε τετράδας συμφώνων τριάδων.

Η δυϊκότητα στον Pachelbel

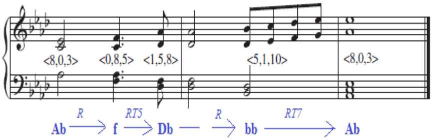


Οι ακολουθίες των τριάδων στον Κανόνα σε D^+ του Pachelbel.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, shift left, "T7"] \arrow[d, shift left, "R"] & A \arrow[l, shift left, "T5"] \arrow[d, shift left, "R"] \\
b \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift right, "T7"'] & f\sharp \arrow[u, shift left] \arrow[l, shift right, "T5"']
\end{tikzcd}$$

Το μεταθετικό διάγραμμα για τα στοιχεία T_7, R.

Η δυϊκότητα στον Wagner

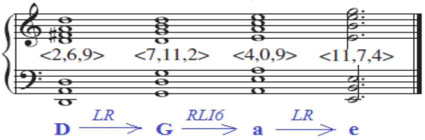


Οι ακολουθίες των τριάδων στο "Grail" Theme του Wagner.

$$\begin{tikzcd} A\flat \arrow[r, mapsto, shift left, "T5"] \arrow[d, shift left, "R"] & D\flat \arrow[l, mapsto, shift left, "T7"] \arrow[d, shift left, "R"] \\ f \arrow[u, shift left] \arrow[r, mapsto, shift right, "T5"'] & b\flat \arrow[u, shift left] \arrow[l, mapsto, shift right, "T7"'] \end{tikzcd}$$

Το μεταθετικό διάγραμμα για τα στοιχεία T_5, R.

Η δυϊκότητα στον Ives



Οι ακολουθίες των τριάδων στο "Religion" του Ives

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, leftrightarrow, "I6"] \arrow[d, shift right, "LR"'] & a \arrow[d, shift left, "LR"] \\ G \arrow[u, shift right, "RL"'] \arrow[r, leftrightarrow, "I6"'] & e \arrow[u, shift left, "RL"] \end{tikzcd}$$

Το μεταθετικό διάγραμμα για τα στοιχεία I_6, LR.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

⋆ Σύνδεση μεταξύ των ομάδων T/I και PLR : Ισομορφισμός - Δυϊκότητα

⋆ Επέκταση θεωρίας σε μεθ′ εβδόμης, μεθ′ ενάτης και διάφωνες συγχορδίες!

⋆ Απώτερος σκοπός της εργασίας: παρότρυνση για διεπιστημονική μελέτη μαθηματικών - μουσικής!

Ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!